

Corrigé

1) On a
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 & 0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 1 & 0 \times 1 + 0 \times 3 + 1 \times 0 \\ 1 \times 0 + 0 \times 1 + 3 \times 1 & 1 \times 0 + 0 \times 0 + 3 \times 1 & 1 \times 1 + 0 \times 3 + 3 \times 0 \\ 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1 & 1 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 1 & 1 \times 1 + 1 \times 3 + 0 \times 0 \end{pmatrix}$$

soit
$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

D'autre part

$$M^3 = M^2 M$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 12 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) On a

$$M^3 + aM^2 + bM + cI_3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 12 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+a+c & a & 4+b \\ 4+3a+b & 1+3a+c & 12+a+3b \\ 4+a+b & 4+b & 1+4a+c \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$M^3 + aM^2 + bM + cI_3 = 0_3$$

équivalent à

$$\begin{cases} 1+a+c=0 \\ a=0 \\ 4+b=0 \\ 4+3a+b=0 \\ 1+3a+c=0 \\ 12+a+3b=0 \\ 4+a+b=0 \\ 4+b=0 \\ 1+4a+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=0 \\ b=-4 \\ c=-1 \end{cases}.$$

3) D'après la question 2), on a

$$M^3 - 4M - I_3 = 0_3$$

ce qui équivaut à

$$M^2 M - 4 I_3 M = I_3$$

$$(M^2 - 4 I_3) M = I_3 .$$

Ainsi, la matrice M est inversible avec



soit

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

